Lecture Notes :
The Local Pro-p Grothendieck Conjecture

望月 新一　(京大数理研)

I. 主定理の紹介：

Theorem : *Let p be a prime number. Let K be a finite extension of $\mathbf{Q}_p$. Let $X_K \to Spec(K)$ and $X'_K \to Spec(K)$ be smooth, proper, geometrically connected curves over K of genus ≥ 2. Let $\Delta_X^{(p)}$ (respectively, $\Delta_{X'}^{(p)}$) be the pro-p completion of the geometric fundamental group of X_K (respectively, X'_K). Then the natural map*

$$Isom_K(X_K, X'_K) \to Out_\rho(\Delta_X^{(p)}, \Delta_{X'}^{(p)})$$

defined by "looking at the induced morphism on fundamental groups" is bijective.

記号： 左辺の $Isom_K(X_K, X'_K)$ は、X_K と X'_K の K 上の同型すべてからなる集合。 一方、右辺の $Out(\Delta_X^{(p)}, \Delta_{X'}^{(p)})$ は、$\delta : \Delta_X^{(p)} \cong \Delta_{X'}^{(p)}$ なる $\Delta_X^{(p)}$ と $\Delta_{X'}^{(p)}$ の位相群としての同型たちの（δ と内部自己同型との合成を、δ と同一視することによって得られる）同値類の集合で、下付きの ρ は、「K の絶対 Galois 群の外部作用と両立するようなもの」を意味する。

Remarks:

(1.)　（専門外の方のために）こんなタイプの結果を通常「Grothendieck 予想」という。どんな感じの結果なのかと言うと、双曲型の代数曲線が与えられたら、その幾何的な被覆を考えることができ、その被覆自体も代数的（つまり、多項式で定義できるもの）なので、定義方程式の係数への K の絶対 Galois 群（以下、Γ_K と書く）の作用から、被覆への Γ_K の作用が引き起こされ、従って、与えられた代数曲線の幾何的基本群の副有限（または、副 p）完備化への Γ_K の作用ができる。 そこで、G.C.（= Grothendieck Conjecture）が主張しているのは、そういう組合せ論的な、群論的な情報（即ち、幾何的基本群の何らかの完備化＋そこへの Galois の作用）から、与えられた代数曲線自体が復元できる、ということです。

(2.)　X_K や X'_K が proper ではなく、アフィン（ただし、依然、双曲型でないといけない）であってもいい version や関数体 version も有る。

(3.)　玉川さんが証明した数体上の副有限アフィン G.C.（= Grothendieck Conjecture）と比較した場合、アフィンから proper に行けたとか、あるいは、副有限から副 p に行けたといった

点が挙げられることは多いですが、実は、むしろ、「数体から局所体に行けた」ということの方がよっぽど重要で本質的でかつ大きな進歩であると思われる。 つまり、少なくとも標数0では、こういう G.C. 型の結果は、 本質的には 数体上大域的な真に「数論的」な現象ではなく、むしろ、純に局所的な p 進解析的な現象だと思う。 で、それを立証するかのように、以下紹介する p 進的なアプローチで証明すると、 proper や副 p といった（玉川さんの結果と比べて）より強い性質はごく自然に出てくる。

(4.) G.C. がまだ完全に予想だった頃には、アーベル多様体の Tate 予想の「遠アーベル版」とよくいわれたが、 Tate 予想は局所体の上では全然成り立たない本質的に数体上大域的な結果であるのに対して、（3）でも指摘したように、 G.C. は p 進解析的な事実として捉えた方がより自然である。

(5.) 数体上の G.C. と局所体上の G.C. の、結果としての強さの格差を端的に示すものとして、次のような考察ができる。数体上の代数曲線が与えられたら、曲線の同型類には、もともと可算個の可能性しかないし、しかも、もしその曲線の Tate 加群を知っていれば、（Faltings の有名な定理を適用すればすぐ分かるように）有限個の可能性しかないのです。それに対して、局所体上の代数曲線が与えられたら、もともと非可算個の可能性があるし、しかも、例え、その Tate 加群を知っているとしても、一般には、まだ非可算個の可能性があるのです。

II. p 進 Hodge 理論で曲線を復元する：

L は (K を含む)p 進体（＝混標数で p 進完備な離散的付値環 $\mathcal{O}_L$ の商体）とし、その剰余体 k_L が、 K の剰余体 k 上の一次元関数体だと仮定する。 X_K の数論的基本群および幾何的基本群はそれぞれ Π_X、Δ_X とし、Δ_X の pro-p 完備化を $\Delta_X^{(p)}$ と書く。さらに、Π_X を、$\Delta_X \to \Delta_X^{(p)}$ の kernel で割ったものを $\Pi_{X_K}^{(p)}$ と書く。そうすると、各射 $\phi : Spec(L) \to X_K$ に対して、それぞれの数論的基本群の間に誘導される連続な群準同型 $\alpha_\phi : \Gamma_L \to \Pi_{X_K}^{(p)}$ を対応させることができる。 そういう ϕ からきた準同型 $\Gamma_L \to \Pi_{X_K}^{(p)}$ を、以下「幾何的」と呼ぶ。

ここで、 Faltings の p 進 Hodge 理論を導入したいのですが、必要なものは全部復習しますので、別にご存知なくても慌てることはありません。まず、その理論によると、次のような自然な同型がある：

$$H^1(\Gamma_{L/K}, \overline{L}^\wedge(1)) \cong \Omega_L \otimes_K \overline{K}^\wedge$$

（ただし、$\Gamma_{L/K} = Ker(\Gamma_L \to \Gamma_K)$、 “(1)” は Tate twist で、 “$\cong$” というのは、実は Faltings のいう “almost isomorphism” なのです。） そして、曲線 X_K を、そのヤコビアン J_X の中に埋め込み、 $Spec(L) \to X_K \hookrightarrow J_X$ なる合成をとることができる。ところが、 p 進 Hodge 理論の帰結の一つとして、 J_X が 本当は K 上のアーベル多様体であるにもかかわらず、（少なくとも、我々が知りたいことに関しては）あたかも $\mathbf{G}_m^g$ に同型であるかのように振舞うのです。したがって、その $\mathbf{G}_m^g$ 上の普通の座標 t_i （ここで、 $i = 1, \ldots, g$）をとって、$Spec(L) \to J_X$ による以下の諸々の対象の引き戻しをとると、次のような図式が出来る：

$$\begin{pmatrix} ? \in H^1(\Gamma_{L/K}, \overline{L}^\wedge(1)) \\ \\ \{\phi^* \frac{dt_i}{t_i}\} \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} t_i^{\frac{1}{p^\infty}} \text{による } \mathbf{Z}_p(1) - torsor \text{たち} \\ \\ \frac{dt_i}{t_i} \text{なる微分たち} \end{pmatrix}$$

ここで、上の行は「π_1 的な情報」で、下の行は、その π_1 的な情報に対応する、「連接層的な情報」なのです。 ところが、 p 進 Hodge 理論の主な主張というのは、上の行の「π_1 的な情報」と下の行の「連接層的な情報」が（$\mathbf{C}_p$ とテンサーして、不変部分をとったりすることによって）自然に対応している、というものです。従って、特に、上の行を知っていれば、下の行も知っていることになるので、つまり、 ϕ に誘導される射

$$H^0(X_K, \Omega_{X_K/K}) \to \Omega_L \otimes_K \overline{K}^\wedge$$

を知っていることになる。しかし、そうすると、少なくとも もし X_K が nonhyperelliptic なら（ところが、 X_K の適当な被覆へいくことによって、扱っている曲線が nonhyperelliptic であると、いつでも仮定してもよい）、 $\phi \in X_K(L)$ という点の

$$X_K \to P \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{P}(H^0(X_K, \Omega_{X_K/K}))$$

なる標準埋め込みによる P における像を知っていることになる。ところが、 $\phi : Spec(L) \to X_K$ がもし非退化ならば、 dominant になるので、それで X_K を、 P の中の部分多様体として復元できたことになる。

つまり、これまで何ができたかというと、 α_ϕ という基本群の間の準同型しか使わずに、 X_K を復元することができたのです。したがって、上の主定理の証明を

$(*)^{geo}$ 「幾何的な準同型 $\Gamma_L \to \Pi^{(p)}_{X_K}$ を純に群論的に特徴付けられるか」

という問題に帰着することができたのです。

III. 有理線束から有理点まで：

さて、今度は抽象的な（Γ_K 上の）連続な群準同型 $\alpha : \Gamma_L \to \Pi^{(p)}_{X_K}$ を考えましょう。 α は全射 $\Pi^{(p)}_{X_L} \to \Gamma_L$ （ここで、 $X_L \stackrel{\mathrm{def}}{=} X_K \otimes_K L$）の section $\alpha_L : \Gamma_L \to \Pi^{(p)}_{X_L}$ を定義し、$Im(\alpha_L) \subseteq \Pi^{(p)}_{X_L}$ なる閉な部分群は X_L の無限次étale 被覆 $Y^\infty_L \to X_L$ を定義する。そして、その無限次被覆を、ある有限次被覆 $Y^n_L \to X_L$ (ただし、 n は非負の整数をはしる）の系の逆極限として書くことができる。ところが、初等的 Galois 理論からすぐ分かるように、 α が幾何的であるのと、$Y^\infty_L(L)$ が空でないのとが同値なので、要は、「$Y^\infty_L(L) \neq \emptyset$」の群論的充分条件を見つけることである。しかし、これはみるからにはちょっと難し過ぎるので、以下（IV.）では、

$(*)^{rat}$ 「$\exists$ p と素な整数 m s.t. $Pic^m_{Y^n_L}(L) \neq \emptyset$」 （ただし、$Pic^m_{Y^n_L}(L)$ は Y^n_L 上の次数 m の line bundle たちからなる集合である。）

の群論的必要充分条件を提示するが、ここ (III.) では、なぜ $(*)^{rat}$ から「$Y^\infty_L(L) \neq \emptyset$」が従うかについて説明する。

それでは、（すべての $n \geq 0$ に対して） $(*)^{rat}$ が成り立つと仮定しよう。そうすると、Y^n_L 上の、次数が p と素な very ample な line bundle $\mathcal{L}$ をとることができる。しかし、$\mathcal{L}$ が very ample なので、$\mathcal{L} = \mathcal{O}_{Y^n_L}(D)$ （ただし、$D \subseteq Y^n_L$ は L 上étale な因子）と書くことができる。ところが、 D は L 上étale なので、幾つかの $Spec(L_i)$ （ただし、 L_i は L の有限次拡

大）の直和として書くことができる。しかも、$\mathcal{L}$ の次数が p と素なため、L_i たちの、少なくともどれかひとつ、たとえば、L_1 の、L 上の次数が p と素であることになる。しかし、そうすると、L_1 は L の tame な拡大になるので、即ち

$(*)^{tm}$ 「$Y_L^n(L^{tm}) \neq \emptyset$」

（ただし、L^{tm} は L の最大 tame 拡大）が出る。

それでは、$y_n \in Y_L^n(L^{tm})$ たちを、tame な有理点の（n に関しての）列としよう。さっき、p 進 Hodge 理論を復習したとき、その $\mathbf{Q}_p$ 版しか扱わなかったが、実は、$mod\ p^N$ 版もあるので、それを適用すれば、y_n たちの P における像が（α だけで決まる）(L^{tm})^- 有理点 $\lambda_\infty \in P((L^{tm})$^$)$ に p 進的に収束することが分かる。そして、今の議論は、P という、X_K 上の大域的微分の空間に対応する射影空間だけではなく、任意の Y_L^n 上の大域的微分の空間に対応する射影空間に適用することができるし、しかも（少なくとも $n \geq 2$ ならば）Y_L^n は non-hyperelliptic なので、その射影空間への射が埋め込みになり、従って、任意の $n_0 \geq 2$ に対して、y_n たち（ただし、$n \geq n_0$）の $Y_L^{n_0}$ における像が、（α で一意的に決まる）(L^{tm})^- 有理点 $\in Y_L^n((L^{tm})$^$)$ に p 進的に収束することが分かる。

つまり、y_n たちは（いってみれば）α で一意的に定まる $y_\infty \in Y_L^\infty((L^{tm})$^$)$ に収束するのだ。そして、$Gal(L^{tm}/L)$ が $Y_L^\infty((L^{tm})$^$)$ に自然に作用しているし、（さっきの議論からわかるように）y_∞ が Y_L^∞ の一意的な (L^{tm})^- 有理点なので、y_∞ は、実は L 上定義されている、という結論になる。即ち、懸案だった

$(*)^{rat} \Longrightarrow$ 「$Y_L^\infty(L) \neq \emptyset$」（$\Longleftrightarrow$ 「α が幾何的である」）

が示されたことになる。

IV. 有理線束の存在クライテリオン：

あとは、$(*)^{rat}$ を群論的な言葉に翻訳さえできれば、証明は完成する。まずは、幾つか非本質的で つまらない技術的な問題を回避するため、$L = K$、$Y_L^n = X_K$ と仮定しよう。（つまり、いいかえれば、簡単のために、Y_L^n ではなく、X_K について考えよう。）すると、$(*)^{rat}$ は次のようになる：

$(*)^{rat}$ 「$\exists\ p$ と素な整数 m such that $Pic_X^m(K) \neq \emptyset$」

いずれは Chern 類について考えたいので、まずは $\mathcal{H}_X \stackrel{\text{def}}{=} H^2(X_K, \mathbf{Z}_p(1))$（“$H^2$” は étale cohomology）の構造を確認しておこう。Leray-Serre スペクトル系列を適用すると、$\mathcal{H}_X$ に $F^*(-)$ なる自然な filtration が入り、なお、$\mathcal{J}_X \stackrel{\text{def}}{=} H^1(X_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_p(1))$（つまり、ヤコビアンの p 進 Tate 加群）と置くと、filtration の部分商は次のようになる：

$$F^2/F^1 \subseteq H^2(X_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_p(1)) \cong \mathbf{Z}_p; \quad F^1/F^0 = H^1(K, \mathcal{J}_X); \quad F^0 = H^2(K, \mathbf{Z}_p(1))$$

次に、Kummer exact sequence から $c_1^{arith}: Pic(X_K) = H^1(X_K, \mathbf{G}_m) \to \mathcal{H}_X$ なる連結準同型（＝数論的 Chern 類写像）ができて、以下では、次数が $2g-2$ で割り切れる line bundle たち（＝以下、$Pic_X^{(2g-2)\mathbf{Z}}(K)$ と書く）の c_1^{arith} による像を群論的に復元したい。

まずは、標準類（つまり、$\omega_{X_K/K}$ の c_1^{arith}) を群論的に復元したい。(本当は、正確にいうと、$\mathbf{Z}_p \cdot c_1^{arith}(\omega_{X_K/K})$ しか復元できないが、それでも充分である。）しかし、

$$H^4(X_K \times_K X_K, \mathbf{Z}_p(2)) \to H^4(X_K, \mathbf{Z}_p(2)) \cong \mathbf{Z}_p$$

という diagonal による引き戻し写像の dual（ここで、$X_K \times_K X_K$ の「数論的 Poincaré Duality」を使っているが）をとると、$\mathbf{Z}_p \hookrightarrow H^2(X_K \times_K X_K, \mathbf{Z}_p(1))$ なる写像ができて、それをさらに diagonal で引き戻すと、$\mathbf{Z}_p \hookrightarrow \mathcal{H}_X$ ができるが、（よく知られているように）その写像の像は $\mathbf{Z}_p \cdot c_1^{arith}(\omega_{X_K/K})$ なのである。

次に、次数 0 の line bundle について考えたいのだが、まず、$mod\, F^0$ では、$J_X(K)$（ここで、J_X とは X のヤコビアン）の元 η に対して、その元がどのくらい p の巾で割り切れるかを考えることによって、

$$\widehat{c}_1^{arith}(\eta) \in \mathcal{H}_X / F^0(\mathcal{H}_X)$$

なる「$mod\ F^0$ の Chern 類」を対応させることができる。しかも、[1] に出ている「よく知られている事実」として、

$$\widehat{c}_1^{arith}(J_X(K)) = Ker(H^1(K, \mathcal{J}_X) \to H^1(K, \mathcal{J}_X \otimes_{\mathbf{Z}_p} B_{DR}))$$

が有る。ところが、（J_X が Picard 関手そのものではなく、その層化しか表現していないために）$J_X(K)$ の元 η は必ずしも line bundle からきているとは限らないが、η の適当な倍元 $M \cdot \eta$ をとれば、$\epsilon \overset{\text{def}}{=} M \cdot \eta$ が line bundle からきていると仮定してもよいし、$\epsilon = \widehat{c}_1^{arith}(\mathcal{L})$（ここで、$\mathcal{L}$ は line bundle）となるとき、ある trick によって、$c_1^{arith}(\mathcal{L})$ も（群論的に）復元できる。即ち、

$$\mathcal{H}^{Pic} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{Q} \cdot c_1^{arith}(Pic_X^{(2g-2)\mathbf{Z}}(K))^\wedge \subseteq \mathcal{H}_X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

（ここで、“$\wedge$” はいつものように、p 進完備化を意味する）を群論的に復元できていることになる。従って、次の、純に群論的な条件を考えることができる：

> $(*)^{pic}$ 「$\exists \eta \in \mathcal{H}_X$ such that the image of η in $H^2(X_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_p(1))$ generates $H^2(X_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_p(1))$, and, moreover, the image of η in $\mathcal{H}_X \otimes \mathbf{Q}$ is contained in $\mathcal{H}^{Pic}$.」

そうすると、もし条件 $(*)^{pic}$ が成立すれば、

$$M \cdot \eta = p^b(a \cdot \eta) = c_1^{arith}(\mathcal{L})$$

となるような（零でない） p 進整数 $M = a \cdot p^b$（ここで、 $a \in \mathbf{Z}_p{}^\times$）と、 X 上の line bundle $\mathcal{L}$ が存在する。 ところが、そうしておくと、 Kummer sequence の定義からすぐ出るように、 $\mathcal{L} = \mathcal{M}^{\otimes p^b}$ なる line bundle $\mathcal{M}$ が存在して、 $\mathcal{M}$ の次数は $\mathbf{Z}_p{}^\times$ に入るので、 p と素になる。

つまり、 $(*)^{pic}$ でもって、 $(*)^{rat}$ を群論的な言葉に翻訳することができたので、主定理の証明はこれで完成する。

文献

[1] Bloch, S. and Kato, K., *L-Functions and Tamagawa Numbers* in *The Grothendieck Festschrift*, Volume I, Birkhäuser (1990), pp. 333-400.

[2] Faltings, G., *p-adic Hodge Theory*, *Journal of the Amer. Math. Soc.* **1**, No. 1, pp. 255-299 (1988).

[3] Mochizuki, S., *The Local Pro-p Grothendieck Conjecture for Hyperbolic Curves*, RIMS Preprint 1045.

[4] Tamagawa, A., *The Grothendieck Conjecture for Affine Curves*, preprint.